

VYUŽITIE TEÓRIE METRICKÝCH PRIESTOROV V RIEŠENÍ PROBLÉMOV GEOTECHNIKY

APPLICATION OF METRIC SPACE THEORY IN THE SOLUTION OF GEOTECHNICS PROBLEMS

Igor Leško¹, Patrik Flegner², Katarína Feriančíková³

Abstrakt

Článok je zameraný na výskum možností využitia teórie abstraktných metrických priestorov pri riešení vybraných problémov v geotechnike. Pojem „metrický priestor“ zavádza funkcionálna analýza ako špeciálna kapitola tzv. modernej matematiky. Ide o matematickú abstrakciu klasického trojrozmerného Euklidovho priestoru. Príspevok skúma možnosti konštrukcie takýchto abstraktných priestorov, kde by jeho prvkami (bodmi) boli geofyzikálne signály, resp. viacrozmerné dáta spojené s riešením konkrétneho problému z oblasti geotechnológií. Tento prístup umožní riešiť mnohé problémy ako problémy klasifikácie objektov alebo stavov procesu ako prvkov priestoru, reprezentovaných svojimi špecifickými signálmi alebo dátami. Aplikácia metrických priestorov otvára následne možnosť nasadenia niektorej z metód umelej inteligencie.

Abstract

The paper is oriented toward research and development of the possibilities of using the theory of abstract metric spaces in the solution of selected problems in geotechnology. The notion of „metric space“ is introduced in functional analysis as a special chapter of so-called modern mathematics. It is a mathematical abstraction of the classical 3-dimensional Euclid space. The article investigates the possibilities of constructing such abstract spaces, where the elements (points) are geophysical signals or multidimensional data connected with the solution of specific problem in the area of geotechnology. This approach enables to solve many problems as problems of classification of objects or states of processes as elements of the space represented by its specific signals or data. Application of metric spaces subsequently opens up the possibility of application of one of the methods of artificial intelligence

Kľúčové slová

metrický priestor, Hilbertov priestor, geofyzikálny signál, klasifikácia, vektorové kvantovanie priestoru

1 Úvod

Mnohé problémy v oblasti geovied, ale aj praktické problémy inžinierskej geológie, geofyziky, seizmológie, a pod. sú riešené metódami založenými na meraní, spracovaní a vyhodnocovaní rôznych geofyzikálnych signálov (Krepelka, 2008), (Pandula, 2010).

Takými to geofyzikálnymi signálmi môžu byť napríklad seizmické záznamy, odozvy stavieb na umelé alebo prirodzené seizmické budenia, seizmologické záznamy zemetrasení, signály mechanického vlnenia v horninovom masíve pri seizmickej tomografii, a pod. Tieto metódy vyhodnocovania signálov sú často založené na ich vzájomnom porovnávaní resp. na porovnávaní nameraných signálov s určitými vzorovými signálmi (etalón, norma). V niektorých prípadoch sa sleduje dynamika zmien určitého špecifického signálu po opakovaných meraniach za určité obdobie. Efektívnosť takýchto metód sa môže zvýšiť, ak nájdeme exaktný spôsob vzájomného porovnávania signálov. Veľmi zaujímavé a často vysoko účinné možnosti poskytuje funkcionálna analýza (Taylor, 1973), konkrétne teória abstraktných metrických priestorov. Funkcionálna analýza chápe funkciu splňujúcu určité základné vlastnosti ako bod (vektor) priestoru a analogicky s klasickým euklidovským trojrozmerným priestorom definuje rôzne vlastnosti medzi prvkami priestoru z hľadiska topológie a geometrie. Napríklad je možné definovať v topologickom a geometrickom zmysle vzdialenosť medzi dvomi funkciami v priestore, ktorá vyjadruje ich rozdielnosť, podobne aj vzájomný uhol, ktoré zvierajú tieto dve funkcie ako vektory v priestore. Pritom platí, že nulovú vzájomnú vzdialenosť majú iba dve navzájom totožné funkcie, nulový vzájomný uhol zvierajú iba dve funkcie, ktoré sa navzájom líšia iba násobkom konštantou (kolineárne vektory). Osobitný význam v týchto abstraktných priestoroch má algebraická operácia skalárneho súčinu dvoch vektorov priestoru, ktorý nadobúda hodnotu nula pre dva navzájom kolmé vektory. V prípade vektorov v podobe funkcií je tento skalárny súčin nulový pre tzv. ortogonálne (navzájom kolmé) resp. ortonormálne funkcie.

Využitie abstraktných priestorov pre riešenie problémov, kedy sa vychádza z nameraných signálov, je možné riešiť na dvoch úrovniach: 1. využitie reálneho konečne rozmerného priestoru Euklidovho typu, 2. využitie komplexného nekonečne rozmerného priestoru Hilbertovho typu (Leško, VEGA 2009).

2 Využívanie abstraktných priestorov Euklidovho typu

Prvá možnosť je často využívaná v moderných metódach technickej diagnostiky, ale aj v metódach umelej inteligencie a je založená na využití konečne rozmerného abstraktného priestoru euklidovského typu $E_N \equiv R^N$. V tomto prípade sa z každej realizácie porovnávaných signálov vypočíta (extrahuje) skupina N príznakov, z nich každý nadobúda väčšinou hodnotu reálneho čísla. Potom každý z porovnávaných signálov je reprezentovaný príznakovým vektorom $p = (p_1, p_2, \dots, p_N) \in E_N$. Vzájomné porovnávanie signálov potom prebieha na základe ich vzájomnej vzdialenosti $\rho_e(p_i, p_j) \in R^+$ a na základe veľkosti spoločne zvieraného uhla $\varphi(p_i, p_j)$:

$$\rho_e(p_i, p_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^N (p_{ik} - p_{jk})^2}, \quad (1)$$

$$\varphi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \arccos \frac{\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle}{\|\mathbf{p}_i\| \|\mathbf{p}_j\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Pritom pre normy príznakových vektorov platí:

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N p_k^2}, \quad (3)$$

pre skalárny súčin dvojice príznakových vektorov platí:

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \sum_{k=1}^N p_{ik} p_{jk}. \quad (4)$$

Interpretácia signálu v takomto euklidovskom N -rozmernom lineárnom algebraickom priestore teda vyžaduje vhodnú voľbu algoritmov pre extrakciu jednotlivých príznakov. Voľba týchto algoritmov determinuje mieru vzájomnej diferencovateľnosti signálov ako bodov abstraktného priestoru príznakového priestoru $E_N \equiv R^N$.

3 Využívanie abstraktných priestorov Hilbertovho typu

Druhá možnosť je menej využívaná a patrí medzi vyššie metódy spracovania signálov. Je založená na využití nekonečne rozmerného abstraktného Hilbertovho priestoru H (Naylor, 1981). Základnou vlastnosťou Hilbertovho priestoru je jeho množinová štruktúra, ktorá umožňuje, aby prvkom priestoru bola celá jedna realizácia signálu ako spojitá ohraničená funkcia času, resp. inej nezávislej premennej. Navyše môže ísť o komplexné funkcie resp. komplexné signály, pretože súradnice Hilbertovho priestoru sú komplexné čísla. Ide teda o priestor $H \equiv C^\infty$. Na implementáciu signálu ako bodu abstraktného Hilbertovho priestoru, je možné využiť jeden z dvoch typov Hilbertových priestorov, ktoré sa od seba líšia svojou množinovou štruktúrou.

Priestor typu $L_p \langle 0, T \rangle$ je množinou všetkých možných komplexných alebo reálnych funkcií spojitých a ohraničených na intervale $\langle 0, T \rangle$. Potom signál $x(t)$ ako bod tohto priestoru môžeme vyjadriť zápisom:

$$x = (x(t), t: 0 \rightarrow T) \in L_p \langle 0, T \rangle. \quad (5)$$

Priestor typu l_p je množinou všetkých možných nekonečných postupností komplexných, resp. reálnych čísel a signál $x(t)$ ako jeho prvok z časového intervalu $\langle 0, T \rangle$ môžeme vyjadriť zápisom:

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p. \quad (6)$$

Zápis (6) viac zodpovedá vzorkovanému signálu pri číslicovom spracovaní, pričom zápis (5) zodpovedá analógovému signálu pred jeho digitalizáciou. V nasledujúcom texte je použitý zápis (5).

Podobne ako v prípade konečne rozmerného euklidovského priestoru $E_N \equiv R^N$, aj v prípade Hilbertovho priestoru platia topologické a geometrické vzťahy medzi signálmi ako bodmi priestoru. Pre vzdialenosť dvoch signálov $x_1(t), x_2(t) \in L_p \langle 0, T \rangle$ platí:

$$\rho(x_i, x_j) = \left(\int_0^T |x_i(t) - x_j(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (7)$$

pre uhol zvieraný dvomi signálmi ako vektormi platí:

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\|x_i\|_2 \|x_j\|_2}. \quad (8)$$

Pritom pre L_2 normy signálov ako vektorov platí:

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (9)$$

pre skalárny súčin platí:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \int_0^T x_i(t) x_j^*(t) dt, \quad (10)$$

kde $x_j^*(t)$ je komplexne združené číslo k hodnote funkcie $x_j(t)$.

Algebraická štruktúra Hilbertovho priestoru umožňuje ten istý vektor ako bod priestoru vyjadriť (rozvinúť) vzhľadom na rôzne ortogonálne alebo ortonormálne bázy. Ide o obecné chápaný tzv. Fourierov rozvoj:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k b_k, \quad (11)$$

kde x je vektor vyjadrený vzhľadom na pôvodnú bázu, koeficienty $x_k, k=0,1,\dots$ sú tzv. Fourierove koeficienty rozvoja (spektrum) a sú to súradnice vektora x vzhľadom na bázu $b = (b_1, b_2, \dots, b_k, \dots)$. Pre koeficienty rozvoja platí:

$$x_k = \langle x, b_k \rangle = \int_0^T x(t) b_k^*(t) dt. \quad (12)$$

Pôvodná báza zosnímaného signálu je báza nekonečnej postupnosti jednotkových funkcií, analogická k ortonormálnej báze Euklidovho priestoru.

V aplikáciách sa rozvoj vektora $x \in H$ do Fourierovho radu (11) uskutočňuje väčšinou voči báze ortogonálnych harmonických funkcií v exponenciálnom tvare

$\left\{ e^{i\omega_0 t}, e^{i\omega_1 t}, \dots, e^{i\omega_k t}, \dots \right\}$. Koeficienty $x_k, k=0,1,2,\dots$ tohto rozvoja sú dané na základe (12) vzťahom

$$x_k = \left\langle x, e^{i\omega_k t} \right\rangle = \int_0^T x(t) e^{-i\omega_k t} dt \equiv \hat{F}_k = \left| \hat{F}_k \right| e^{i\varphi},$$

kde symbolické označenie týchto koeficientov zápisom \hat{F}_k vyjadruje, že ide o komplexné

čísla (komplexné amplitúdy harmonických zložiek signálu). V praktických riešeniach sú tieto koeficienty spektra signálu počítané pre konečné frekvenčné rozlíšenie známym algoritmom rýchlej Fourierovej transformácie FFT, resp. DFT.

Vyjadrenie signálu ako spojitely ohraničenej funkcie času na intervale $\langle 0, T \rangle$ je možné previesť dvoma rovnocennými spôsobmi:

- v podobe (5) ako spojitú funkciu času $x = (x(t), t: 0 \rightarrow T) \in L_p \langle 0, T \rangle$,

- v upravenej podobe (5) pomocou jeho spektra, v našom prípade frekvenčného spektra ako funkciu

$$x = \left(x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{F}(\mathbf{i}\omega) e^{i\omega t} d\omega, t: 0 \mapsto T \right) \in L_p \langle 0, T \rangle,$$

kde funkčné hodnoty sú počítané zo spektra signálu pomocou funkcionály pre

spätnú Fourierovu transformáciu. V tomto prípade výraz $\hat{F}(\mathbf{i}\omega)$ predstavuje spojitý komplexné frekvenčné spektrum signálu ako

spojitá analógia vyššie uvedeného diskrétného spektra $\hat{F}_k(\mathbf{i}\omega), k = 0, 1, 2, \dots$.

Uvedená rovnocennosť vyjadrenia signálu v časovej a vo frekvenčnej oblasti znamená z pohľadu Hilbertových priestorov to, že geofyzikálny signál x je z hľadiska funkcionálnej analýzy možné definovať ako bod (vektor) Hilbertovho priestoru typu L_p , pričom jeho súradnicami môžu byť buď hodnoty signálu pre $t:0 \mapsto T$, alebo komplexné hodnoty jeho spojitého frekvenčného spektra $\hat{F}(\mathbf{i}\omega)$ pre $\omega:0 \mapsto \infty$. Teda v oboch prípadoch ide o ten istý vektor priestoru H , rozdiel je len v použitej ortogonálnej báze. Aby boli tieto dve vyjadrenia toho istého signálu navzájom typograficky odlišené, je možné použiť rozdielnu veľkosť písma, čím dostávame: $x = (x(t), t:0 \mapsto T) \in L_p \langle 0, T \rangle$ a $X = (\hat{F}(\mathbf{i}\omega), \omega:0 \mapsto \infty) \in L_p \langle 0, \infty \rangle$. Problém s tým, že interval $\langle 0, \infty \rangle$ nie je zprava uzavretý na tomto mieste nie je riešený, pretože pri číslicovom spracovaní signálov sa tento matematický nedostatok stráca.

4 Porovnávanie geofyzikálnych signálov v príznakovom priestore typu E_N

Jednou z oblastí geotechniky, kde je možné uplatniť abstraktné matematické priestory, je efektívne riadenie procesu rotačného vrtania horninového masívu, kde signál sprievodných vibro - akustických emisií je možné využiť ako integrujúci informačný zdroj o aktuálnom stave procesu vrtania. Vedecký výskum v tejto oblasti je orientovaný smerom ku klasifikácii rozpojovaných hornín a ich zatriedovaniu do spoločných tried. Zaradenie práve rozpojovanej horniny do príslušnej triedy na základe charakteru sprievodných vibro - akustických emisií umožňuje následne nastaviť taký režim vrtnej súpravy, ktorý je expertami off - line stanovený pre danú triedu ako efektívny režim. Na nasledujúcom obrázku je znázornenie príznakových vektorov extrahovaných z tridsiatich realizácii sprievodného vibračného signálu z troch druhov hornín. Z dôvodov možného zobrazenia ide o dvojjložkové príznakové vektory $p_i = (p_{i1}, p_{i2})$, kde príznak p_{i1} je počítaný ako norma vzorkovaného signálu (realizácie) o dĺžke $n = 1024$ vzoriek:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{1023} x_k^2} \equiv L_2 x, \quad (13)$$

a príznak p_{i2} je parameter „peak-to-peak“ daný vzťahom:

$$p_{i2} = \left| \max(x_0, x_1, \dots, x_{1023}) - \min(x_0, x_1, \dots, x_{1023}) \right| \quad (14)$$

Obrázok obr. 1 dokumentuje dobrú diferencovateľnosť troch hornín v euklidovskom príznakovom priestore E_2 .

V tabuľke tab. 1 sú uvedené vzdialenosti medzi centroidmi príznakových vektorov v priestore E_9 so škálovanými príznakmi do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pomocou metriky (1). Všetkých 9 príznakov je extrahovaných zo sprievodného akustického signálu z procesu rotačného vrtania piatich hornín. Výsledky potvrdzujú opäť vysokú diferencovateľnosť vrtaných hornín v príznakovom priestore E_9 .

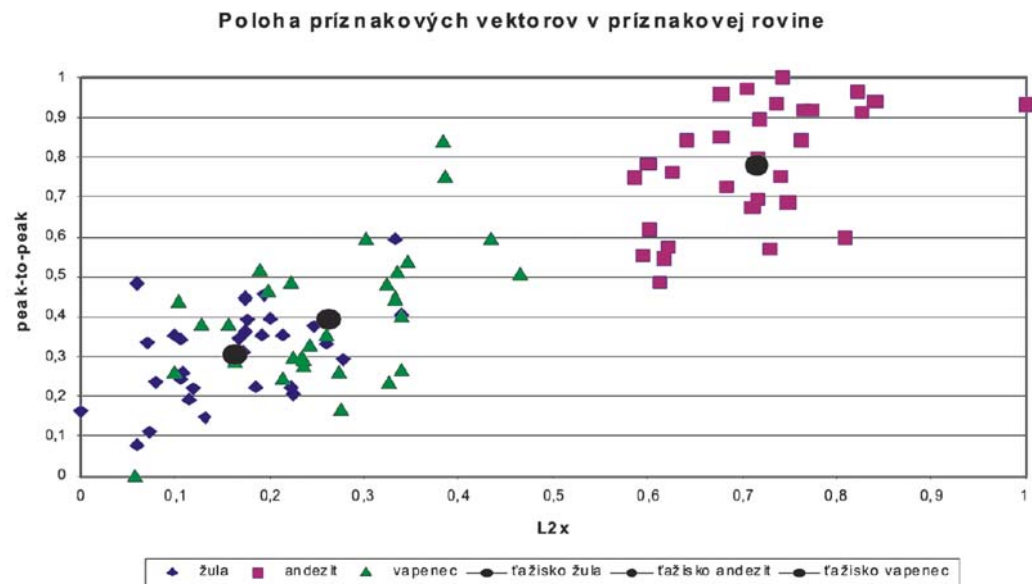
Tab.1 Vzájomné vzdialenosti centroidov príznakových vektorov v priestore E_9 ; príznaky sú extrahované zo sprievodného akustického signálu

	kremeň	mramor	šamot	tehla2	vápenec
kremeň	0,0	0,4	0,41	0,29	0,6
mramor	0,4	0,0	0,81	0,12	0,21
šamot	0,41	0,81	0,0	0,69	0,99
tehla2	0,29	0,12	0,69	0,0	0,31
vápenec	0,6	0,21	0,99	0,31	0,0

5 Porovnávanie geofyzikálnych signálov v Hilbertovom priestore typu $L_p \equiv H$

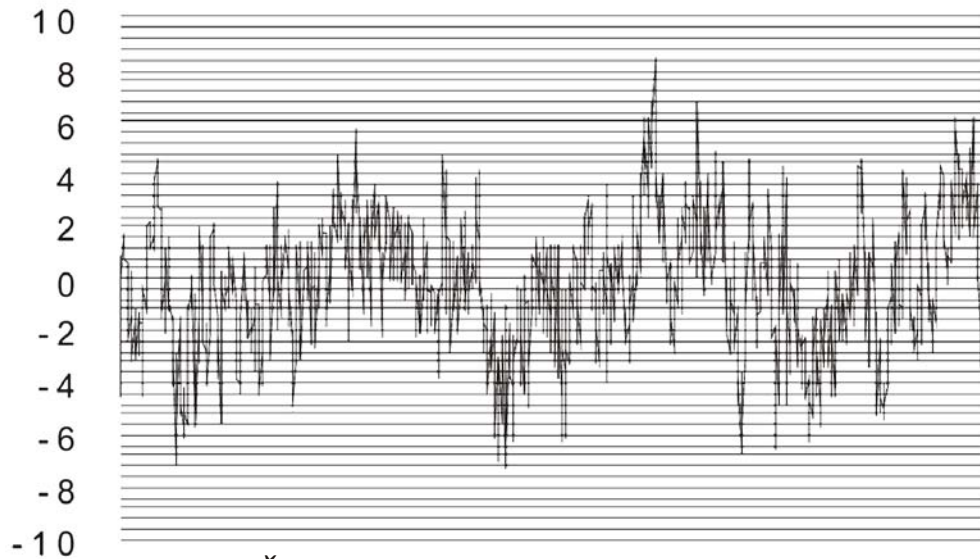
V nasledujúcom je ilustrovaná aplikácia Hilbertovho priestoru opäť pri problematike efektívneho riadenia procesu rozpojovania hornín rotačným vŕtaním. Signál sprievodných vibrácií je tu chápaný ako prvok priestoru $L_p \langle 0, T \rangle \equiv H$, pričom tento reálny signál akcelerometra spĺňa podmienky spojitosti a ohraničenosti na intervale $\langle 0, T \rangle$ a je ho možné vyjadriť zápisom tvaru (5). Na obrázku obr. 2a je znázornený časový priebeh realizácie tohto signálu, na obrázku obr. 2b je zjednodušené ilustračné zobrazenie tejto realizácie signálu ako bodu nekonečne rozmerného Hilbertovho priestoru, ktorého súradnicami sú jednotlivé hodnoty signálu v čase $t, t: 0 \rightarrow T$. Pritom signál ako vektor je tu zjednodušene zobrazený ako ťažisko súradníc vektora. Na obrázku obr. 2c je zjednodušené ilustračné znázornenie realizácie signálu ako bodu nekonečne rozmerného Hilbertovho priestoru, ktorého súradnicami sú jednotlivé hodnoty amplitúdového spektra signálu pre uhlové frekvencie $\omega, \omega: 0 \rightarrow \infty$.

Analyzované boli realizácie signálov sprievodných vibrácií z procesu vŕtania troch hornín (Leššo, 2009), (Leššo, 2010). Každá realizácia signálu bola transformovaná algoritmom FFT do vektora $X_{|\cdot|} = \left(\left| \hat{F}(\mathbf{i}\omega), \omega: 0 \mapsto \infty \right| \right)$. Následne boli počítané L_2 normy týchto vektorov vzťahom (15), ktorý je numerickou realizáciou vzťahu (9). Na obrázku obr. 3 je uvedený priebeh tejto normy pre tridsať realizácií každej z troch hornín.



Obr. 1 Zobrazenie príznakových vektorov extrahovaných z realizácií vibračného signálu z rozpojovania troch hornín v príznakovom priestore

v a p e n e c



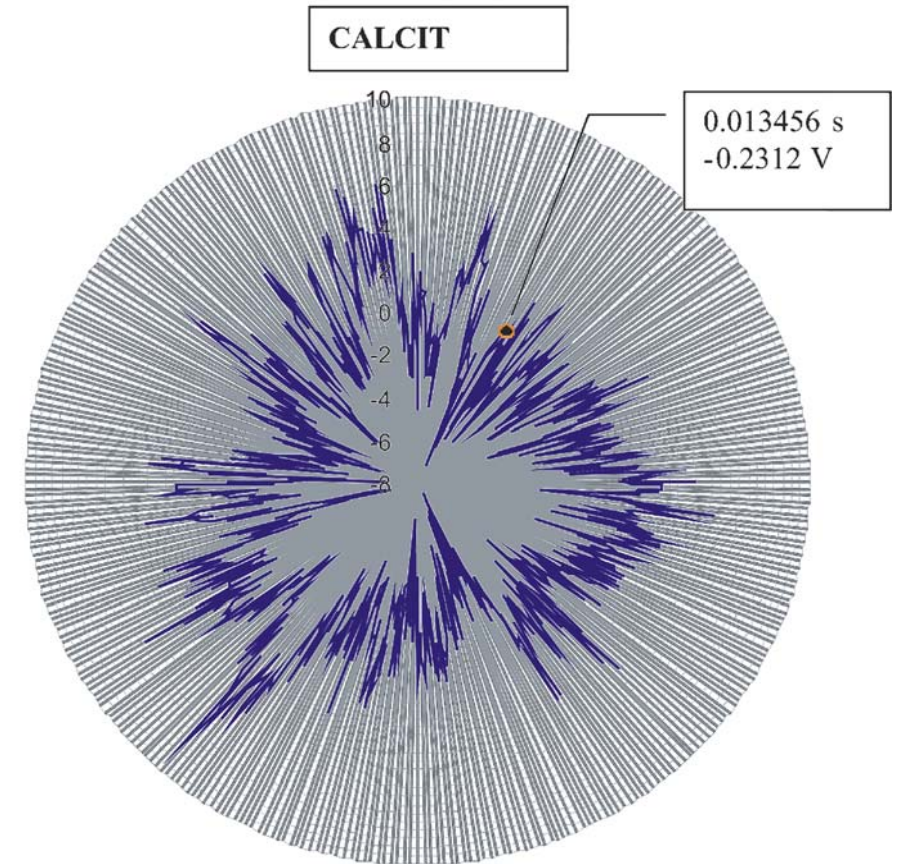
Obr. 2a Časový priebeh vibračného signálu pri vŕtaní vápenca (jedna realizácia signálu)

$$\|X_{|\cdot|}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{1023} |\hat{F}(\mathbf{i}\omega_k)|^2} \equiv L_2 X_{|\cdot|}, \quad (15)$$

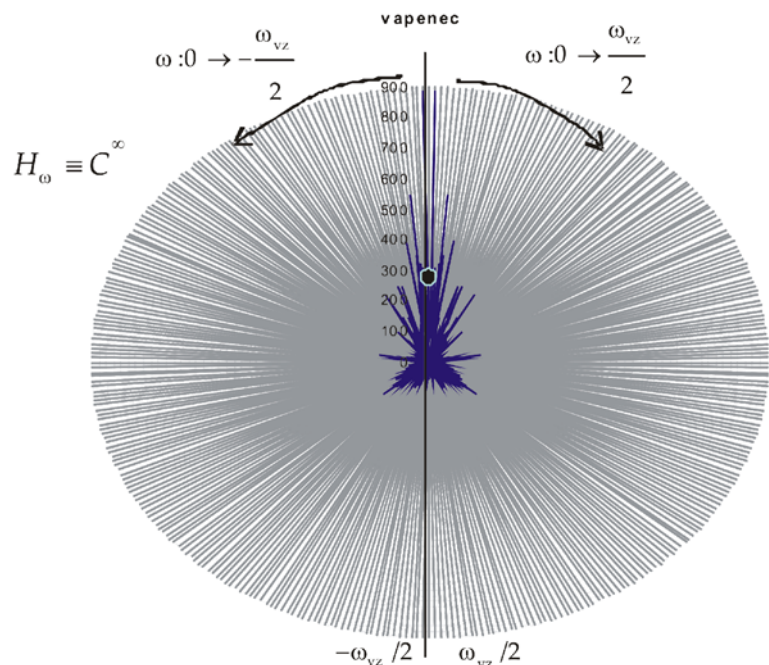
Nakoľko norma vektora vyjadruje jeho vzdialenosť od počiatku súradnicového systému, rozdielnosť hodnôt nasvedčuje o preukázateľnej diferencovateľnosti analyzovaných hornín v Hilbertovom priestore.

V tabuľke tab. 2 sú uvedené výpočty vzájomných vzdialenosti trojice analyzovaných hornín v Hilbertovom priestore. Použitá je metrika (7) aplikovaná pre vektory vyjadrené vzhľadom na bázu harmonických funkcií (frekvenčná oblasť, vektor $X = (\hat{F}(\mathbf{i}\omega), \omega: 0 \mapsto \infty) \in L_p \langle 0, \infty \rangle$).

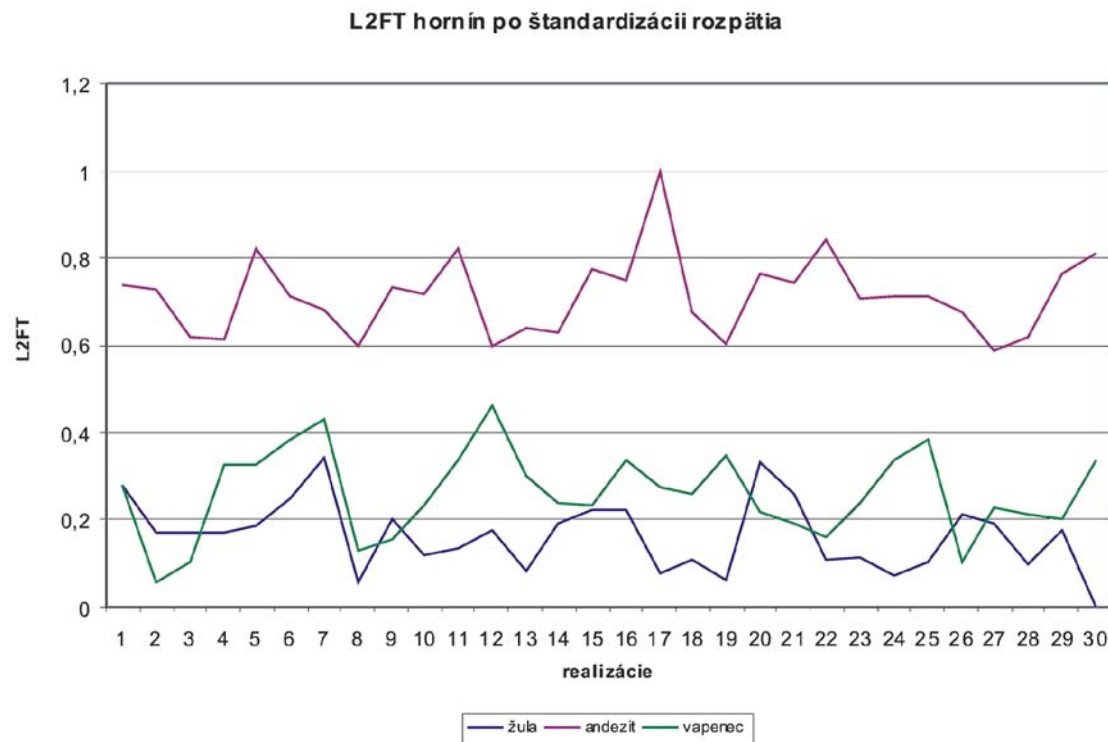
Na obrázku obr. 4 je virtuálne znázornenie troch analyzovaných hornín v 3D priestore, pričom sa vychádzalo z vypočítaných noriem a vzájomných uhlov. Obrázok je akosi projekciou hornín z nekonečne rozmerného Hilbertovho priestoru do Euklidovho 3D priestoru. Je tu preukázaná dobrá diferencovateľnosť hornín na základe sprievodných vibrácií pri rotačnom rozpojovaní.



Obr. 2b Zjednodušená predstava interpretácie signálu z obr. 2a ako vektora (bodu) označenom ako $x = (x(t), t: 0 \text{ a } T)_{L_p} \langle 0, T \rangle$ v nekonečne rozmernom reálnom Hilbertovom priestore typu $L_p \langle 0, T \rangle$; časový priebeh signálu



Obr. 2c Zjednodušená predstava interpretácie signálu z obr. 2a ako vektora (bodu) $X = \left(\hat{F}(i\omega) \Big|_{\omega:0 \text{ a } \infty} \right)$ v nekonečne rozmernom Hilbertovom priestore $L_p \langle 0, \infty \rangle$; amplitúdové frekvenčné spektrum signálu



Obr. 3 Diferencovateľnosť analyzovaných hornín v Hilbertovom priestore pomocou vypočítaných noriem vektorov vo frekvenčnej oblasti

6 Záver

V príspevku sú uvedené dielčie výsledky vedeckého výskumu skupiny riešiteľov, ktorí skúmajú možnosť využitia matematickej teórie abstraktných priestorov v oblasti spracovania geofyzikálnych signálov. Ťažiskom výskumu je v súčasnosti aplikácia týchto metód v oblasti riadenia procesu rozpojovania hornín rotačným vŕtaním. Prvé experimenty sa týkajú aj spracovania seizmických signálov v inžinierskej seizmike. Autori uvádzajú základné teoretické východiská problematiky metrických priestorov Euklidovho a Hilbertovho typu, pričom pred matematickou presnosťou dávajú prednosť lepšej zrozumiteľnosti textu. Obrázky a tabuľky ilustrujú pomerne dobrú schopnosť použitých metód a algoritmov navzájom rozlíšiť geofyzikálne signály na základe ich vlastností. Konečným cieľom takto orientovaného výskumu je využiť abstraktné Hilbertove priestory na klasifikáciu a rozpoznávanie geofyzikálnych signálov pri

zohľadňovaní predom definovaných vzorov jednotlivých tried signálov. Na vytváranie vzorov tried je možné použiť napríklad algoritmus vektorového kvantovania. Uvedené postupy a metódy rozpracované v článku je možné spájať s metódami umelej inteligencie.

Tab.2 *Vzájomné vzdialenosti vektorov hornín v priestore $L_p \equiv H$ vo frekvenčnej oblasti*

Hornina		$L_p \equiv H$
x_i	x_j	$\rho(x_i, x_j)$
Andezit	Žula	909
Vápenec	Žula	469
Andezit	Vápenec	912

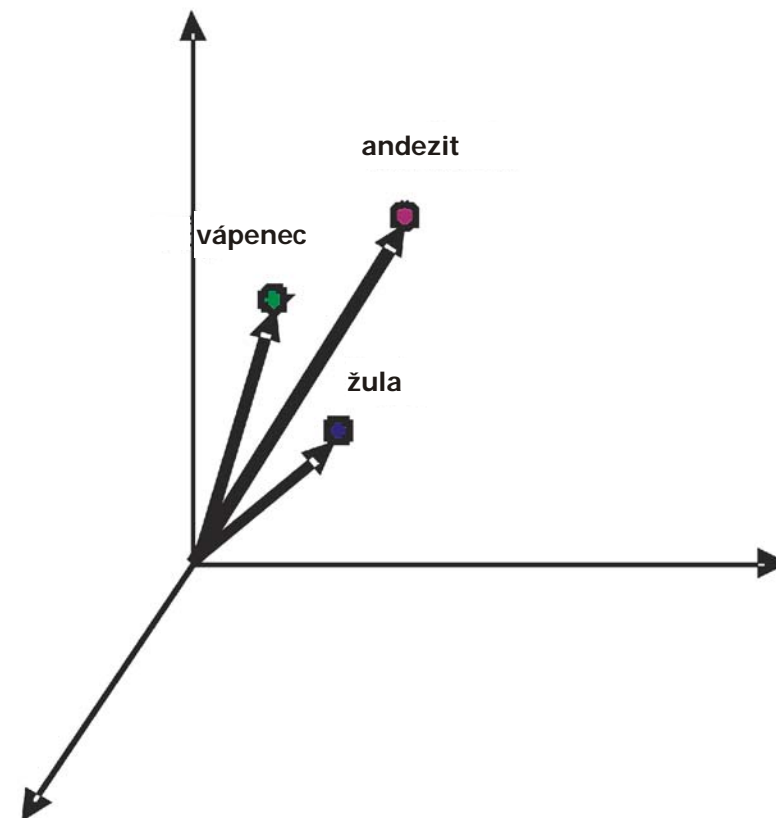
V ďalšom vedeckom výskume sa bude pozornosť venovať využitiu uvedených metód pri seizmickej tomografii kde sa bude skúmať vplyv vnútornej štruktúry horninového bloku na prenos umelo generovaných seizmických signálov a s tým súvisiace možnosti vizualizácie.

Prehlásenie

Tento článok vznikol vďaka podpore v rámci OP Výskum a vývoj pre projekt: ITMS 26220220031, spolufinancovaný zo zdrojov Európskeho fondu regionálneho rozvoja. Článok vznikol aj za podpory projektov MŠ VEGA 1/0567/10 a 1/0746/11.

References

- LEŠŠO, I. & FLEGNER, P. [et al.] VEGA 1/4194/07 *Výskum exaktných metód hodnotenia efektívnosti a kvality procesu rozpojovania hornín rotačným vrtaním*, Záverečná správa, FBERG TU v Košiciach, 2009.
- NAYLOR, A.W. & SELL, G.R. *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*, Alfa 1981, 1. vydanie. ISBN: 63-175-81.
- TAYLOR, A.E. *Úvod do funkcionálnej analýzy*, Praha, 1973, Academia.
- KREPELKA, F. & CHLEBOVÁ, Z. & IVANIČOVÁ, L. Meranie, analýza a vyhodnocovanie prevádzkových náhodných procesov pri vrtaní hornín. *In Acta Mechanica Slovaca, optimalizácia mechanických sústav*. ISSN 1335-2393, 2008, roč. 12. č. 3-C, p. 229-136.



Obr. 4 *Virtuálne rozmiestnenie analyzovaných hornín v 3D priestore, ktoré zodpovedá priemerným hodnotám noriem a hodnotám vzájomných uhlov hornín ako vektorov v Hilbertovom priestore*

- PANDULA, B. & KONDELA, J. *Metodológia seizmiky trhacích prác*, Slovenská spoločnosť pre trhacie a vŕtacie práce – ZSVTS, Bamská Bystrica, Košice, 2010.
- LEŠŠO, I. & FLEGNER, P. [et al.] Application of vector quantisation method for effective and quality process control of rock disintegration by rotary drilling. *In SGEM 2009. Volume 2.* - Sofia : Bulgarian academy of sciences, 2009 p. 115-122, ISBN 9549181812
- LEŠŠO, I. & FLEGNER, P. [et al.] Research of the possibility of application of vector quantisation method for effective process control of rocks disintegration by rotary drilling. *In Metalurgija. Vol. 49, no. 1* (2010), p. 61-65, ISSN 0543-5846,
Spôsob prístupu:http://public.carnet.hr/metalurg/Metalurgija/2010_vol_49/No_1/MET_49_1.pdf.
-

Autori

- ¹ prof. Ing. Igor Leššo, CSc., Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov, Fakulta BERG, Technická univerzita v Košiciach, Letná 9, 040 01 Košice, Slovenská republika, tel.: (+421) 055 6025178, e-mail: igor.lesso@tuke.sk.
- ² Ing. Patrik Flegner, Ph.D., Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov, Fakulta BERG, Technická univerzita v Košiciach, Letná 9, 040 01 Košice, Slovenská republika, tel.: (+421) 055 6025174, e-mail: patrik.flegner@tuke.sk.
- ³ Ing. Katarina Feriančíková, Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov, Fakulta BERG, Technická univerzita v Košiciach, Letná 9, 040 01 Košice, Slovenská republika, tel.: (+421) 055 6025190, e-mail: katarina.feriencikova@tuke.sk.